Grundlagen der Algebra: Jonglieren mit Zahlen

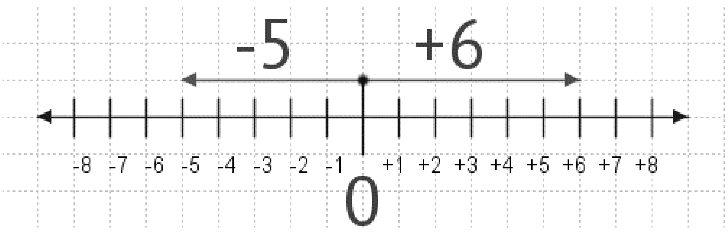
Was Zahlen sind, kann nicht allgemeinverständlich erklärt werden, ist hier unwichtig.
Du „weißt“, was 0 oder +3 oder −5 oder 2/3 oder 1,23 oder $1{,}2\overline{3}$ bedeutet, das genügt.
Unbekannte oder nicht festgelegte Zahlen symbolisieren wir mit Buchstaben: a, b, c, x ...
Algebra produziert mit sogenannten **Operatoren** aus mehreren Zahlen **eindeutig** neue.
Mathematik ist die Handhabung und Anwendung dieser Operatoren, ein eindeutiges und in sich widerspruchsfreies Konstrukt des menschlichen Geistes. Denk sie dir als Werkzeugkasten mit vielen Anwendungsmöglichkeiten in allen Bereichen des Lebens. Ständig werden von mathematischen Genies die Werkzeuge verbessert und neue erfunden. Manche Werkzeuge sind so kompliziert, dass nur wenige Menschen sie bedienen können. Hier lernst du die Bedienung derer kennen, die jeder Mensch braucht.

Der Zahlenstrahl

Denk dir Zahlen als Punkte auf einer Geraden (obwohl das problematisch ist)

← negative Zahlen	positive Zahlen →

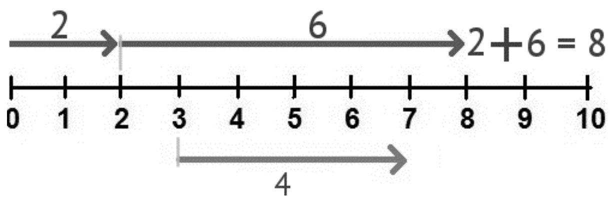
Besser noch: denk dir Zahlen als verschiebbare Pfeile



Das + lassen wir meist weg: +6 = 6

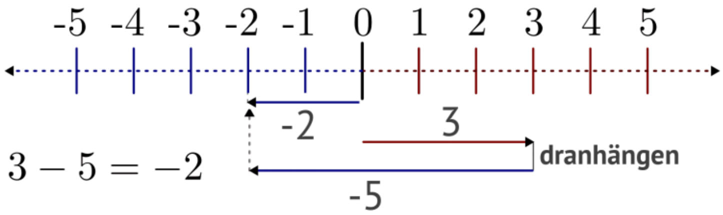
„Operatoren“ produzieren aus zwei Zahlen eindeutig neue.

Elementarer Operator: die Addition, Symbol +



dieses + bedeutet „den Pfeil 6 an den Pfeil 2 „dranhängen“: 2 + 6 = 8
Der Pfeil 8 hat als Anfangspunkt wieder die Null 0.

Negative Zahlen werden auch einfach drangehängt: 3 + (-5) = -2



Neuer Operator: ein Minus vor einer Zahl dreht den Pfeil um − (+3) = −3

Damit ist +3 − (−5) = 3 + 5

Beachte zunächst den Unterschied zwischen dem Zahlvorzeichens +3 (Pfeilrichtung) und dem Operatorzeichen − (+3), welches bedeutet „Drehe den Pfeil +3 um".

Folgt (Mathematik verwendet immer eine möglichst elegante, kurze Darstellung):

+3 + (+5) = 3 + 5 = 8
3 + (−5) = 3 − 5 = −2
3 − (−5) = 3 + 5 = 8

Vorsicht: Abfolgen wie 2 + - 3 machen keinen Sinn !

Üben (~~Taschenrechner~~): langsam, entspannt, Überblick verschaffen -nicht gleich losrennen!

-100 − (-50) + 123 + (+45) − (+2) + (-7) + 2023 − 2023 = ?	
100.000 − (-10.000) + 1000 − 100 + 10 − 1 = ?	
25 + 75 − 3000 + 2900 + 250 + 1250 − 567 + 89 − 1 + = ?	

Ein weiterer Operator: „**Teilen**". Das meint z. B. die Zahl 6 in drei Teile teilen: 6/3 = 2
Anders formuliert: die Zahl 2 passt dreimal in die Zahl 6
Die Schreibweise 6 : 2 ist gefährlich (führt zu Fehlern), verwirrend und oft irreführend.

Wir gehen hier von der Kenntnis der **rationalen Zahlen** aus: **Q**
Du kennst die Natürlichen **Zahlen N** = 1, 2, 3, 4 … und die **ganzen Z** = 0, +1, -1, +2, -2 …
und die **Brüche**: 6 : 2 = 6/2 = $\frac{6}{2}$ = 3 oder 3/4 = 0,75 oder 1/3 = 0,333… = $0,\overline{3}$
Q ist einfach die Menge aller Zahlen, die man als **Bruch** schreiben kann: x/y
Jede Zahl kann man als **Dezimalzahl** schreiben: 6/2 = 3 oder 3/4 = 0,75 oder 1,234…
Brüche in Dezimalschreibweise haben immer eine Periode [kürzer als die Nennerzahl].

Es gibt unendlich viel mehr Zahlen als die rationalen: die **irrationalen** wie π … [später]

Rechenoperatoren (Lerne die Begriffe)

(Zusammenzählen) **Addieren (Addition)**: 12 + 13 = 25
12 + 13 ist eine Summe, 12 und 13 sind Summanden

(Abziehen) **Subtrahieren (Subtraktion)**: 5 − 17 = −12
5 − 17 ist eine Differenz, 5 ist der Minuend, 17 der Subtrahend

(Malnehmen) **Multipliplizieren (Multiplikation)**: 7 · 4 = 28
7 · 4 ist ein Produkt, 7 und 4 sind Faktoren

(Teilen) **Dividieren (Division)**: 12 : 4 = 3
12 : 4 ist ein Quotient, 12 ist der Dividend, 4 der Divisor

Potenzieren (Potenz): $2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2 = 2^5$ und $10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10 = 10^6$ …

eine elegante Abkürzung, allgemein: b^n [b heißt Bais, n ist der sogenannte Exponent)

Am Rande: 3 · 5 ist auch nur eine Abkürzung von 5 + 5 + 5
Und gleich eine Fallgrube: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, aber 2 · 3 = 6 … es gibt viele Fallgruben!

Merk dir bitte die **Vorzeichenregeln**
Plus mal Minus und umgekehrt Minus mal Plus … ergibt Minus
Minus mal Minus und natürlich Plus mal Plus … ergibt Plus
Plus durch Minus und umgekehrt Minus durch Plus ergibt Minus
Minus durch Minus ergibt Plus

Ergänzend gilt + (+)3 = +3 = 3 und + (-3) = -3 und − (+3) = -3 und − (-3) = +3 = 3

+ (+ …) = +	− (+ …) = + (- …) = −	−(- …) = +

Vorsicht: Zeichenabfolgen ohne Klammern sind Unsinn, z. B. 2 + · − +3 ist Unsinn!

Lerne und übe zusätzlich

Die Vielfachen der Zahlen bis 20 z. B. 7 , 14 , 21 , 28 , 35 , 42 , 49 , 56 , 63 , 70

Das „**Einmaleins**": 4 · 8 = ? , 3 · 12 = ? , 24 · 15 … also zweistellige Zahlenbereich

Teilen: 17 : 3 = 5 mit Rest 2 … bedeutet 17 : 3 = 5 + 2 : 3 = 5 + 2/3 = oft kurz $5\frac{2}{3}$

Das solltest auf ohne schriftliche Rückmultiplikation auf diesem Niveau können:
1234567 : 8 = 1554320,875 oder $2/7 = \dfrac{2}{7} = 2:7 = 0,\overline{285714}$ ⟶ Üben !

Rechengesetze
Die Gesetze sind so gemacht, dass alle Berechnungen eindeutig und für die Praxis (Wirtschaft, Wissenschaft, Technik) tauglich sind.
Das zu untersuchen erfordert allerdings universitäres Niveau, Vertraue der Mathematik.
Man muss sich anfangs bei jeder Rechnung klarmachen, auf welchem Gesetz sie beruht.
Jede Abweichung führt i. a.zu einem schweren Fehler, also nie „nach Gefühl" vorgehen.

Algebra erfordert viel Übung und konzentriertes und zugleich entspanntes Arbeiten.

Kommutativgesetz der Addition $2 + 3 = 3 + 2$

Kommutativgesetz der Multiplikation $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

Es gibt KEIN Kommutativgesetz der Division $8 : 2 \neq 2 : 8$

und KEIN Kommutativgesetz der Subtraktion $8 - 2 \neq 2 - 8$

Assoziativgesetz der Addition:

$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 2 + 3 + 4 = 9$ ... Klammern weg in reiner Addition

Assoziativgesetz der Multiplikation:

$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ... Klammern weg in reiner Addition

Es gibt KEIN Assoziativgesetz der Division oder Subtraktion

Aus praktischen und mathematisch zwingenden Gründen gibt es eine
Rangreihenfolge der Operatoren:
Der Hauptoperator: die Klammer $\rightarrow$ vorerst endgültige Rangreihenfolge:
Klammer (über allen) vor **Potenz** (↑) vor **„Punkt"** (· :) vor **„Strich"** (+ −)

Test: $(2^3 \cdot 4 + 4) : 9 - (5 - 8) = \ \ldots \ = 7$

Es gibt (zunächst) keine weiteren Gesetze.

Als Beispiel eine beliebte Falle: $(3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2$ ... das ist leider völlig falsch.
Das Ergebnis ist eindeutig 49, aber $3^2 + 4^2 = 25$

Für den Alltag: **lerne (bombensicher greifbar – ohne nachzudenken):**
die ersten **Quadratzahlen** bis 20 $\rightarrow$ $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$ ... bis $20^2 = 400$

die ersten **Potenzen** 2^n bis $n = 10$ $\rightarrow$ 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , 256 und je die

ersten drei bis vier Potenzen der Zahlen bis 10 $\rightarrow$ 3^n **,** 4^n **,** 5^n

Trainiere Kopfrechnen (eventuell mit Taschenrechnerkontrolle) so oft und intensiv wie nur irgend möglich. Nutze jede Gelegenheit. Das macht sich sogar garantiert bezahlt. Benutze den Taschenrechner nur, wenn es sein muss oder weil du einfach mal nicht denken willst.

Große Zahlen und Zahlbegriffe: hier einige, die in der Praxis auftauchen:

$100 = 10^2$	
$1000 = 10^3$	kilo:
$1000.000 = 10^6$	Million ≡ Mega
$1000.000.000 = 10^9$	Milliarde ≡ Mrd ≡ Giga
$1000.000.000.000 = 10^{12}$	Billion
$1000.000.000.000.000 = 10^{15}$	Billiarde

Vorsicht: 1 Billion (englisch) = 1 Million (deutsch)
Zwecks besseren Überblicks benutzt man ein „Dreiergruppentrennzeichen“: 123.456
Schau genau hin: 123.456,789

Anwendung der Zahlen- und einiger Mengenabkürzungen in der Praxis:

1000 Gramm = 1 Kilogramm = 1kg

1 Zentner (kurz Ztr) = 50 kg

1000 kg = 1 Tonne = 1t = ... = 20 Ztr

1000 Volt = 1000 V = 1 kV

1000.000 Volt = 1 Million Volt = 10^6 V = 1 MegaVolt = 1 MV

1000.000.000 Volt = 1 Milliarde Volt = 10^9 V = 1 GigaVolt = 1 GV

1 Zentimeter = 1cm = 10 Millimeter = 10 mm

1 Dezimeter = 1 dm = 10 Zentimeter = 10 cm

100 cm = 1 m

1000 m = 1 Kilometer = 1 km

1 Liter = 1000 cm^3

1 Hektoliter = 100 Liter

1 Ar = 10m x 10m = 100 m^2 und 1 Hektar = 100 Ar = 10.000 m^2

60 Sekunden = 1 Minute und 60 Minuten = 1 Stunde = 1 h → 3600 Sekunden = 1 h

Üben (mit Partner): Beispiele ...

Nähere auf die erste Stelle, schreib die Zahl dann als 10er-Potenz, sag das Zahlwort:
8.567.304.812 = 8 Mrd 567 Mill 304 Tausend 812 = 8´567´304´812
$\cong$ 9´000´000´000 = $9 \cdot 10^9$ = 9 Milliarden
35.673.048 = ... = 35 Mill + 673 Tausend + 48 $\cong$ 40 Millionen

Verwandle (mit Kontrollpartner)

in Sekunden: 2h 5min 10Sek	
in Meter: 3,5 km + 25 m - 50 dm	
in Millimeter: 4 dm + 2 cm - 5 mm	
in Kilogramm: 1,5 t + 250 kg + 4 Ztr	
in Gramm: 2kg + 20g – 0,5 kg	
in Ztr: 7,5 t + 200kg	

Spezielle Zahlen: **Primzahlen:**
Prinzahlen sind größer als 1, nur durch 1 und sich selbst teilbar, also 2, 3, 5, 7, 11, 13 ..
Man kann jede Zahl als Podukt von Primfaktoren darstellen: „Primfaktorzerlegung“
Beispiel: $360 = 10 \cdot 36 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
Man probiert systematisch die Teilbarkeit durch 10, 5, 2, 3, 7, 9, 11, 13, ...

Primfaktorzerlegung ist wichtig für das Aufsuchen des „Kleinsten gemeinsamen Vielfachen, des kgV:

kgV (24 ; 36) = kgV($3 \cdot 2^3$; $2^2 \cdot 3^2$) = $2^3 \cdot 3^2 = 72$

denn 72 : 24 = 3 und 72 : 36 = 2 , also je ohne Rest teilbar ... die kleinste, die das kann.

Man braucht diese (kleinsten) gemeinsamen Vielfachen insbesondere für die Addition von Brüchen, weil der gemeinsame Nenner Vielfaches der einzelnen Nenner sein muss.

Das ist durchaus anspruchsvoll, wenn die Nenner nicht nur Zahlen, sondern Terme sind:
Beispiel: kgV($6 ; 2x ; 3x^2 ; 4(x+1) ; y$) = $12 \cdot x^2 \cdot (x+1) \cdot y$

Das einfachste Vielfache ist das Produkt der Zahlen und Terme.
Also nicht krampfhaft das kgV suchen, man kann am Ende der Vereinfachungen kürzen.

Üben:

Zerlege in Primfaktoren: 2520 ; 8580 ; 300 ; 630630
Subtrahiere im Kopf und schriftlich formal 3465 – 1342
Multipliziere a) 12 · 15 b) 9 · 24 c) 50 · 130 d) 0,5 · 14
Runde auf Hunderter a) 537846 b) 30800652 c) 80009
Teile im Kopf (mit Rest) a) 29: 7 b) 38 : 13 c) 81 : 11 d) 1 : 0,5
Wie viel Zeit vergeht zwischen 9:25 Uhr und 14: 40 ?

Praxis: Geschwindigkeit

Überlege dir zunächst, warum 10 m/s = 36 km/h sind und präge dir die Regel ein:

m/s ⟶ · 3,6 ⟶ km/h und km/h ⟶ : 3,6 ⟶ m/s

72 km/h = 72:3,6 m/s = 20 m/s

5 m/s = 5 · 3,6 km/h = 18 km/h

Wer bei 108 km/h für 2 Sekunden die Augen schließt, fährt 60 m blind.

10 m/s = 36 km/h	36 km/h = 10 m/s

Aufgaben (mit Kontrollpartner):

1. Ein Auto fährt 240 km in 4 Stunden 20 Minuten Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit. 2. Ein Fußgänger geht mit ca. 6 km/h. Wie lang braucht er für eine 15km lange Strecke ? 3. Wie schnell muss man laufen, um die Marathondistanz 42 km in 2 Stunden zurückzulegen?	

Unbekannte oder variable Zahlen a , b , c , x , y , … und Terme T

Anmerkung:
Wenn wir viele solche Zahlen benötigen, benutzen wir den Schreibtrick **Index** x_1 , x_2 , x_3
Den Trick benutzen wir auch bei Punkt in der Geometie: A_1 , A_2 , A_3

Sprechweise:
Unbekannte, nach Bedarf wählbare, aber für die vorliegenden Berechnung fixe Zahlen heißen **Parameter**.
Aus einem Zahlenbereich für das vorliegenden Problem variable Zahlen heißen einfach **Variable**. Frei wählbare heißen **unabhängig**, sind sie Rechenergebnis - **abhängig**.

Ein Term ist eine Kombination aus konkreten Zahlen, Parametern und Variablen.

Dabei kürzen wir oft ab: $3 \cdot a = 3a$
Schreib bitte nicht a3 (das würde verwirren) sondern 3a

Beispiel: $T = (3a^2 + 4) / 5$
Verwenden wir eine konkrete Zahl für a, nennen wir das **einsetzen**: wähle a = 5
elegante Darstellung: $T(5) = (3 \cdot 5^2 + 4) / 5 = \dots = 15{,}8$

Vorsicht, schau genau hin: $T(x_5) = 5 + 2x_5{}^3 = 5 + 2 \cdot x_5 \cdot x_5 \cdot x_5$
Mit $x_5 = 4$ ergäbe das $T(4) = 133$. Bring nicht Potenz und Index durcheinander!

Und jetzt etwas sehr Wichtiges:

Terme sind auch nur (unbekannte) Zahlen, keine geheimnisvollen Produkte !

Und damit gelten für Terme dieselben Rechengesetze wie für konkrete Zahlen:

$2T + 3T = 5T$ und $2T \cdot 3T = 6T^2$ aber $2T_1 + 3T_2$ ist NICHT addierbar.

Man versucht immer, Terme möglichst zu vereinfachen (und Brüche zu kürzen):
$2x + 3x = 5x$ oder $7a - 4a = 3a$ oder $2b^3 \cdot 3b^2 = 6b^5$ oder $6y^3 / 2y^2 = \dots = 3y$

Allerdings kann man nun gedankenlos viel Unsinn produzieren, dies ist völlig falsch:
$4^5 = 20$ oder $X^2 + X^3 = X^5$ oder $7z - z = 7$ oder $(b^2)^3 = b^5$ … was wäre denn richtig?

Wir brauchen noch ein „Gesetz“ (eigentlich nur ein Rechentrick): das **Distributivgesetz**

Man überlegt sich problemlos: $\mathbf{2} \cdot (3 + 4) = \mathbf{2} \cdot 3 + \mathbf{2} \cdot 4$ bzw. $\mathbf{2} \cdot (3 - 4) = \mathbf{2} \cdot 3 - \mathbf{2} \cdot 4$
Die Situation: Faktor · (Summe oder Differenz) … und nur in dieser Situation gilt das!

Allgemein: $\mathbf{a} \cdot (b \pm c) = \mathbf{a} \cdot b \pm \mathbf{a} \cdot c$ oder $\mathbf{T_1} \cdot (T_2 \pm T_3) = \mathbf{T_1} \cdot T_2 \pm \mathbf{T_1} \cdot T_3$

Wichtiger als die Umformung $3a \cdot (2x + 4a^2) = \ldots = 6ax + 12a^3$ ist die Umkehrung:

Ausklammern gemeinsamer Faktoren aus zwei oder mehreren Summanden

Da liegt die Latte schon hoch:

$12ax^3y - 8xy^2 - 24a^2xy = \ldots = -4xy \cdot (-3ax^2 + 2y + 6a^2)$

Und jetzt das Sahnehäubchen: $T^2 + T = \ldots = T \cdot T + T \cdot 1 = T \cdot (T + 1)$

Etwas komplexer: $27a^2 - 36a^3 = 9a^2 \cdot (3 - 4a)$

Ausklammern ist DIE Methode, mit der man Summen in Produkte verwandeln kann.
Das ist wichtig, weil man bei Produkten schneller erkennt, wass sie den Wert 0 liefern.

Eigentlich banal, aber extrem bedeutsam und Ursache vieler Fehler:

Addieren (Subtrahieren) kann man nur Vielfache völlig identischer Terme

2 Äpfel + 3 Äpfel = 5 Äpfel

Aber 2 Äpfel + 3 Birnen = … = eine Handvoll Obst, aber nicht 5 Apfelbirnen.

2ä + 3ä = 5ä … ist doch egal, worum es geht: $2\,\Delta + 3\,\Delta = 5\,\Delta$ oder eben $2a + 3a = 5a$

$2a^2 + 3a^2 = 5a^2$

$7x^3 - 4x^3 = 3x^3$

aber $x + x^2$ ist nicht addierbar. Hier kann man aber ausklammern: $x + x^2 = x \cdot (1 + x)$

Unfug:	$x^2 + x^3 = x^5$ …	NEIN, sondern	$x^2 + x^3 = x^2 \cdot (1 + x)$
	$2x - x = 2$ …	NEIN, sondern	$2x - x = x$ und $5y - 8y = -3y$
	$(x + y)^2 = x^2 + y^2$ …	NEIN, sondern	$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = \ldots$ später

Präge dir folgende „**Potenz-Gesetze**" (eigentlich nur Vereinfachungen) gut ein:

Realisiere aufmerksam die Schreibweise: $X^3 = X \cdot X \cdot X$

Zunächst die Sprechweise am Beispiel $2^3 = 8$ 2 ≡ Basis , 3 ≡ Exponent , 8 ≡ Potenzwert

Man überlegt sich anhand der Definition für beliebige Basen X und Exponenten a, b … dass folgende Regeln gelten (präge sie dir ganz fest ein − wie alle Regeln):

Multiplikation von Potenzen → Addition der Exponenten: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Division von Potenzen → Subtraktion der Exponenten: $x^a : x^b = x^{a-b}$

Potenzen potenzieren → Multiplikation der Exponenten: $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Multiplikation bei verschiedener Basen und gleichen Exponenten: $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

Division bei unterschiedlichen Basen und gleichen Exponenten: $x^n : y^n = (x:y)^n$

Potenzen mit hoch Eins, der Potenzwert entspricht der Basis: $x^1 = x$

Potenzen mit dem Exponenten Null ergeben immer Eins (warum ! ?): $x^0 = 1$

Potenzen mit negativem Exponenten (warum ? ⟶ Bruchrechnen!): $a^{-n} = 1/a^n$

Letzteres führt zu $\frac{1}{X^{-n}} = X^n$ und $\left(\frac{X}{Y}\right)^{-n} = \left(\frac{Y}{X}\right)^n$

Beachte: $(-X)^g = X^g$ wenn g gerade ist, aber $(-X)^u = -X^u$ wenn u ungerade ist.

Beispiel: $-(-3)^{-4} = \ldots = -1/81$ und $-(-2)^{-3} = \ldots = 0{,}125$ ⟶ **Üben !**

Du wirst später feststellen, dass man diese Regeln bei positiver Basis auf beliebige Exponenten erweitern kann, dass also $-1{,}234^{-5{,}6}$ Sinn macht, $(-1{,}234)^{-5{,}6}$ aber nicht.

Beispiele:
$(a^{-3} \cdot a^5)^2 : (2a^4 - a^2/a^{-2}) + a^0 = \ldots 2$
$1 / X^{-3} = X^3$
$(2/3)^{-2} = (3/2)^2 = \ldots = 2{,}25$

Prozent: (auf Deutsch „ pro Hundert“) sind nur eine besondere Bruchschreibweise!

Statt … /100 schreibt man % (was die Sache nicht wirklich vereinfacht)

Schau Dir die Beispiele ganz genau an: es gibt drei gleichwertige Schreibweisen.

3/4 = 0,75 = 75/100 = 75 %

3/7 = 0,428571 … ≈ 0,4286 = 42,86/100 = 42,86 %

3,145 = 314,5/100 = 314,5 %

Extrem wichtig: bombensicheres und schnelles **Bruchrechnen**

Wir halten uns nicht auf mit der Herleitung der Regeln: lerne sie einfach.

Zunächst: Man kann jeden Bruch durch **Erweitern** auf unzählige Arten darstellen:

Erweitern: multipliziere Zähler und Nenner mit derselben Zahl (NICHT den Bruch)

Beispiel $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4}$ und allgemein: $\frac{z}{n} = \frac{z \cdot x}{n \cdot x}$ …

Die Umkehrung heißt kürzen: **Kürzen kann man NUR gemeinsame Faktoren.**

Die Forderung nach Eindeutigkeit und Praxistauglichkeit führt zu folgenden Regeln:

Man addiert / subtrahiert zwei Brüche,

indem man bei gleichem Nenner die Zähler addiert / subtrahiert

Anmerkung: dazu braucht man gleiche Nenner mittels **Erweiterung**.

Man multipliziert zwei Brüche,
indem man ihre Zähler und ihre Nenner multipliziert

Man teilt zwei Brüche,
indem man den Dividenden mit dem Kehrbruch des Divisors multipliziert

Man multipliziert einen Bruch mit einer Zahl (einem Term),
indem man den Zähler mit der Zahl (dem Term) multipliziert.

Man teilt einen Bruch durch eine Zahl (einen Term),
indem man den Nenner mit der Zahl (dem Term) multipliziert.

Hier hilft nur eines: **eine Unmenge Übung, am besten mit einem kompetenten Partner!**
Es gibt eine Unmenge Trainingsliteratur in Heftform und online.

Die größten Probleme bereitet erfahrungsgemäß das Aufsuchen des gemeinsamen Nenners. Und hier passieren auch viele Fehler.

Entscheidend ist:
Der gemeinsame Nenner muss Vielfaches aller beteiligten Nenner sein.
Er muss nicht notwendig das kleinste gemeinsame Vielfache (das kgV) sein.
Vorsichtshalber: benutze einfach das Produkt aller Nenner, du kannst am Ende kürzen.

Man sollte ohnehin i. a. jeden Bruch sofort soweit wie möglich kürzen: 40/60 = 2/3

Trainiere das Aufsuchen des (kleinstmöglichen) gemeinsamen Vielfachen:

Bei reinen Zahlen kann die Primfaktorzerlegung sinnvoll sein.

6 ; 8 ; 14	
3 ; 5 ; 7 ; 11	
2a ; 4b ; 6c ; 8d	
$2x$; $3x^2$	
x ; x + 1 ; 4x ; 10	
$2x^3 - 8x$; $x + 2$; $x - 2$	
17 ; 34a ; a^2 ; b	
y ; y − 1 ; 1 − y	
5p ; 7q ; 11r (mit den Primzahlen p , q , r)	

Addiere nun die Brüche mit diesen unterschiedlichen Nennern (und jeweils Zähler = 1):
Überlege dir, womit du jeweils erweitern musst.

Summenmultiplikation: eine Folge des Distributivgesetzes

$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d = ac + bc + ad + bd$

Salopp formuliert: **Jeder Summand der ersten Summe wird mit jedem Summenden der zweiten Smme multipliziert – unter Beachtung der Vorzeichen!**

Überlege dir ein System, damit du nicht zweimal dieselben Summanden multiplizierst oder ein Produkt übersiehst. Mein System:
$(2 + x - y) \cdot (3 - a + b) = \ldots = 2\cdot3 - 2a + 2b \quad + \quad 3x - ax + bx \quad - 3y + ay - by$

Binomische Formeln ... eine Anwendung der Summenmultiplikation

Mit simpler Summenmultiplikation (tu das bitte - unbedingt) prüft man:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Mach dir klar, dass a und b nur Platzhalter für jede Zahl und jeden noch so komplexen Term sind. Wichtig nebenbei die perfekte Kenntnis der Potenzgesetze!

$(3x + ab^3)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot ab^3 + (ab^3)^2 = 9x^2 + 6ab^3x + a^2b^6$

$(2f^2 - 7)^2 = (2f^2)^2 - 2 \cdot 2f^2 \cdot 7 + 7^2 = 4f^4 - 28f^2 + 49$

$(5x + 1) \cdot (1 - 5x) = (1 + 5x) \cdot (1 - 5x) = 1^2 - (5x)^2 = 1 - 25x^2$

Binomische Formeln sind das Lieblingsspielzeug der Mathelehrer,
haben aber in der Praxis keine Bedeutung. Lern sie einfach zwecks guter Noten.
Hier ein paar Übungsbeispiele: falte das Blatt und versuch es selber...

$(0{,}1x + 1/4)^2 =$	$0{,}01x^2 + 0{,}05x + 0{,}625$
$(0{,}2a^2 + y) \cdot (y - a^2/5) =$	$y^2 - 0{,}04a^4$
$(10ab - 0{,}5a)^2 =$	$100a^2b^2 - 10a^2b + 0{,}25a^2$
$(x^3b^2 + 1{,}2xb)^2 =$	$x^6b^4 + 2{,}4x^4b^3 + 1{,}44x^2b^2$
$1 - 0{,}25x^6 =$	$(1 - 0{,}5x^3) \cdot (1 + 0{,}5x^3)$
$(1/a - a/6)^2 =$	$1/a^2 - 1/3 + a^2/36$

Allgemein:

Vermeide den Taschenrechner so weit wie möglich, benutze ihn nur zur Kontrolle!

Trainiere das Einmaleins so weit wie nur irgend möglich: $26 \cdot 15 = ?$

Erarbeite dir Rechentricks: $2\frac{3}{4} - 1{,}25 = ?$

Lerne / übe schnelles Abschätzen: $0{,}021 \cdot 34{,}9 = ?$

Übe Dividieren im Kopf: $20 / 7 = 2,\overline{857142}$ und sicheres schriftliches Mutliplizieren.
Schau aber erstmal aufmerksam hin: $0{,}025 \cdot 40 = 0{,}25 \cdot 4 = 1$
$0{,}00001 \cdot 1000 = 0{,}01$ [linkes Komma rutscht um die drei rechten Nuller nach rechts]

Übe schnelles Prozentrechnen:
a) 25% von 12 = ?
b) 80 weniger 5% = ?
c) 3 ist wieviel % von 15
d) 5% von 120% von 100 = ?
e) 4 € sind wieviel % Nachlass auf 32 € ?

Schnell greifbar sollte sein:	1/2	= 0,5	= 50%
	1/5	= 0,2	= 20%
	3/4	= 0,75	= 75%
	1/8	= 0,125	= 12,5%
	1/3	$= 0{,}\overline{3}$	= 33,3%